Ueber die konforme Abbildung

$$Z = z^3 \text{ und } z = \sqrt[3]{Z}.$$

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Fakultät zu Marburg

eingereicht von

Friedrich Schaffrath,
ordentlichem Lehrer am Progymnasium zu Wipperfürth.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1884.

Allgemeines.

Es ist $Z = z^3$, also in Parallelkoordinaten

$$X + Yi = (x + yi)^3$$
$$= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$$

Durch Gleichsetzen des Reellen und Imaginären ergiebt sich

$$X = x^3 - 3xy^2 \qquad 1)$$
$$Y = 3x^2y - y^3 \qquad 2)$$

In Polarkoordinaten ist

$$R(\cos \Phi + i \sin \Phi) = \left[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\right]^3$$
$$= r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$$

woraus sich ergiebt

$$R = r^3 \qquad 3)$$
$$\Phi = 3\varphi \qquad 4)$$

Aus der letzteren Beziehung folgt, dass einem einmaligen Umkreisen des Anfangspunktes der zEbene ein dreifaches Umkreisen in der ZEbene entspricht. Nach der Riemann'schen Darstellungsweise muss also die ZEbene als dreiblättrig, als eine Windungsfläche zweiter Ordnung angesehen werden. Jedem Blatte entspricht ein Sektor der zEbene von 120°. Da für $z = 0$ auch $Z = 0$ und die Beziehung dann eindeutig wird, so hängen die drei Blätter im Anfangspunkte zusammen; letzterer ist also der eine Endpunkt des Verzweigungsschnittes. Der andere Endpunkt desselben ist der unendlich ferne Punkt, für welchen dieselben Beziehungen stattfinden.

Jede vom Anfangspunkt aus nach dem unendlich fernen Punkte gezogene Linie kann also als Verzweigungsschnitt gewählt werden. Wo derselbe in Folgendem in Betracht kommt, soll stets die positive reelle Achse dazu genommen werden. Lässt man in der ZEbene vom Anfangspunkte aus einen Punkt in beliebiger Richtung die drei Blätter zugleich durchwandern, so entsprechen seinem Wege in der zEbene drei Richtungen, die unter Winkeln von 120^0 auf einander folgen. Der Anfangspunkt der ZEbene ist also ein Verzweigungspunkt; ebenso der unendlich ferne Punkt, der sich dem Anfangspunkte analog verhält. Man kann sich dies bekanntlich am besten dadurch zur Anschauung bringen, dass man die Ebene als eine Kugel mit unendlich grossem Radius ansieht, wobei dann der unendlich ferne Punkt der Gegenpunkt des Anfangspunktes ist.

Aus den erhaltenen Beziehungen 1) und 2) ergeben sich umgekehrt zur Bestimmung von x und y aus X und Y die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} X^3 + 15x^3X^2 + 48x^6X + 26x^3Y^2 - 64x^9 = 0 \\ \text{oder} \\ 64x^9 - 48x^6X - x^3(15X^2 + 27Y^2) - X^3 = 0 \end{array}\right\} \quad 5)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} Y^3 - 15y^3Y^2 + 48y^6Y - 27y^3X^2 + 64y^9 = 0 \\ \text{oder} \\ 64y^9 + 48y^6Y - y^2(27X^2 + 15Y^2) + Y^3 = 0 \end{array}\right\} \quad 6)$$

Beide eignen sich zur allgemeinen Behandlung nicht so gut, wie die in Polarkoordinaten aus 3) und 4) sich ergebenden einfacheren Beziehungen

$$r = \sqrt[3]{R} \qquad 7)$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{3} \qquad 8)$$

Diese Ausdrücke sind, wie zu erwarten stand, dreideutig: der Ausdruck für r in Folge der drei Werthe der Kubikwurzel;

der für φ kann gemäss den angestellten Betrachtungen geschrieben werden

$$\varphi = \frac{\Phi + 2\pi n}{3}$$

wobei für n die Werthe 0, 1 und 2 gesetzt werden können.

Weitere allgemeine Beziehungen zwischen entsprechenden Gebilden der z- und ZEbene sind noch folgende:

Jeder Drehung eines Gebildes um den Anfangspunkt in der zEbene entspricht eine dreifache Drehung um den Anfangspunkt in der ZEbene ohne Aenderung der Gestalt, da r und R dabei unverändert bleiben. Da ferner der absolute Betrag des Differentialquotienten das Vergrösserungsverhältniss angibt, so ist in Folge von

$$\frac{dZ}{dz} = 3z^2 = 3r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

das Vergrössrungsverhältniss

$$3r^2.$$

Innerhalb eines Kreises um den Anfangspunkt mit dem Radius $r = \sqrt{\frac{1}{3}}$ findet also Verkleinerung, ausserhalb desselben Vergrösserung statt. Für den unendlich fernen Punkt ist die Vergrösserung unendlich gross, für den Anfangspunkt unendlich klein.

Abbildungen von Geraden der zEbene auf die ZEbene.

Jeder in der zEbene durch den Anfangspunkt gehenden Geraden entspricht in der ZEbene wieder eine Gerade durch den Anfangspunkt. Speciell entspricht der xAchse, für die also $y = 0$ einzusetzen ist, die Gerade

$$Z = x^3$$

also die XAchse. Der yAchse, für die $x = 0$ ist, entspricht

$$Z = -y^3 i$$

also der positiven yAchse die negative YAchse, der negativen yAchse die positive YAchse. Dieselben Resultate ergeben sich aus $\Phi = 3\varphi$, indem

für $\varphi = 0$ $\quad \Phi = 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\quad \Phi = \frac{3}{2}\pi$

$\varphi = \pi$ $\quad \Phi = 3\pi = 2\pi + \pi$

$\varphi = \frac{3}{2}\pi$ $\quad \Phi = \frac{9}{2}\pi = 4\pi + \frac{\pi}{2}$

ist.

Einer Parallelen zur xAchse, deren Gleichung also ist

$$x = a$$

wobei a selbst stets positiv genommen werden möge, entspricht eine Curve dritten Grades, deren Gleichung sich durch Einsetzen von $x = a$ in 5) ergiebt als

$$X^3 + 15a^3X^2 + 48a^6X + 28a^3Y^2 - 64a^9 = 0$$

Die Schnittpunkte derselben mit der XAchse ergeben sich durch Einsetzen von $Y = 0$ aus der Gleichung

$$X^3 + 15a^3X^2 + 48a^6X - 64a^9 = 0$$

Dieselbe hat die drei Wurzelwerthe

$$X_1 = a^3$$

$$X_1 = X_3 = -8a^3$$

Für die Schnittpunkte mit der YAchse ergiebt sich durch Einsetzen von

$$X = 0$$

die Gleichung $27a^3Y^2 - 64a^9 = 0$,

also $$Y = \pm \frac{8\sqrt{3}}{9} a^3$$

Da die Gleichung der Curve Y nur in der zweiten Potenz

enthält, also zu jedem Werthe von X zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von Y gehören, so liegt die Curve symmetrisch zur XAchse.

Für $$X > a^3$$

ergeben sich für Y imaginäre Werthe, während für nach der negativen Seite hin wachsende X auch Y fortwährend zunimmt so dass für $$X = -\infty$$

auch $Y = \pm\infty$ wird.

Die Curve besteht also aus einem nach der negativen Seite ins Unendliche sich erstreckenden Linienzuge, der um den Anfangspunkt eine Schleife bildet. In diesem geschlossenen Theile erreicht Y ein maximum für

$$X = -2a^3$$

und zwar wird dann

$$Y = \pm 2a^3$$

Einer Parallelen zur yAchse, deren Gleichung ist

$$x = -a$$

entspricht die Kurvengleichung

$$X^3 - 15a^3X^2 + 48a^6X - 27a^3Y^2 + 64a^9 = 0$$

Für die Schnittpunkte mit der YAchse ergeben sich hier aus der Gleichung

$$X^3 - 15a^3X^2 + 48a^6X + 64a^9 = 0$$

die den vorigen entgegengesetzt gleichen Wurzelwerthe

$$X_1 = -a^3$$
$$X_2 = X_3 = 8a^3$$

während für die Schnittpunkte auf der YAchse sich wieder ergiebt:

$$Y = +\frac{8\sqrt{3}}{9}a^3$$

Für $X < -a^3$ werden die Y imaginär, während sie für über den Werth $8a^3$ hinauswachsende X ebenfalls bis ins Unendliche wachsen.

Einer Parallelen zur x Achse, deren Gleichung ist

$$y = b$$

entspricht eine Curve dritten Grades, welche die Gleichung hat

$$Y^3 - 15b^3Y^2 + 48b^6Y - 27b^3X^2 + 64b^9 = 0$$

Das Einsetzen von

$$X = 0$$

liefert zur Bestimmung der Schnittpunkte mit der Y Achse die Gleichung

$$Y^3 - 15b^3Y^2 + 48b^6Y + 64b^9 = 0$$

welche die drei Wurzeln hat

$$Y_1 = -b^3$$
$$Y_2 = Y_3 = 8b^3$$

Für $Y = 0$ ergiebt sich

$$X = \pm \frac{8\sqrt{3}}{9} b^3$$

Hier werden für $Y < -b^3$ die X imaginär, während sie für $Y > 8b^3$ zugleich mit Y ins Unendliche zunehmen.

Während also bei den Parallelen zur y Achse die den auf der positiven Seite gelegenen Parallelen entsprechenden Kurven der Z Ebene sich nach der negativen Seite hin ins Unendliche erstrecken und umgekehrt, findet bei den Parallelen zur x Achse das entgegengesetzte Verhalten statt.

Für

$$y = -b$$

wird die Kurvengleichung

$$Y^3 + 15b^3Y^2 + 48b^6Y + 27b^3X^2 - 64b^9 = 0$$

also hat man für die Schnittpunkte auf der Y Achse aus der Gleichung

$$Y^3 + 15b^3Y^2 + 48b^6Y - 64b^9 = 0$$

die den vorigen entgegengesetzt gleichen Wurzeln

$$Y_1 = b^3$$
$$Y_2 = Y_3 = -8b^3$$

während die Schnittpunkte auf der X Achse dieselben bleiben.

Die Gleichungen der eben behandelten Kurven in Polarkoordinaten ergeben sich aus

$$x = a = r \cos \varphi$$
$$y = b = r \sin \varphi$$

in Folge von 7) und 8) als

$$\sqrt[3]{R} \cos \frac{\Phi}{3} = a$$

$$\sqrt[3]{R} \sin \frac{\Phi}{3} = b$$

oder also

$$R \cos^3 \frac{\Phi}{3} = a^3$$

$$R \sin^3 \frac{\Phi}{3} = b^3$$

Lässt man die Abstände der Parallelen in der z Ebene, a und b, eine arithmetische Reihe durchlaufen, so erhält man in der Z Ebene eine Schaar ähnlicher Kurven, wobei die Entfernungen der Schnittpunkte auf den Achsen von dem Anfangspunkte in kubischer Reihe zunehmen.

Figur I. stellt die Kurven für den Fall $a = b$ dar.

Die Grundform der betrachteten Kurven ist die Parabel, welche sich bei der Abbildung $Z = z^2$ in dem entsprechenden Falle ergiebt. Es ist dann

$$X = x^2 - y^2$$
$$Y = 2xy$$

also für $x = a$

$$X = a^2 - y^2$$
$$Y = 2ay$$

woraus sich durch Elimination von y als Gleichung der

den Parallelen zur y Achse entsprechenden Abbildungscurven ergiebt

$$Y^2 = 4a^2 (a^2 - X)$$

Dies ist die Brennpunktsgleichung einer Parabel, deren Scheitelabstand a^2 und deren Achse die nach der negativen Seite hin gerichtete X Achse ist. Dabei ändert sich für

$$x = -a$$

die Gleichung nicht.

Den Parallelen zur x Achse

$$y = \pm b$$

entspricht die Kurvengleichung

$$Y^2 = 4b^2 (X + b^2)$$

welche eine Parabel mit dem Brennpunkt im Anfangspunkt und dem Scheitelabstand $-b^2$ darstellt, deren Achse die positive X Achse ist.

Die Gleichungen lauten in Polarkoordinaten

$$\sqrt{R}\ \cos\frac{\Phi}{2} = a$$

$$\sqrt{R}\ \sin\frac{\Phi}{2} = b$$

oder

$$R\ \cos^2\frac{\Phi}{2} = a^2$$

$$R\ \sin^2\frac{\Phi}{2} = b^2$$

Die beiden sich ergebenden Parabelschaaren sind also confokal und gruppiren sich um die reelle Achse als Symmetrieachse. Die Lage und Gruppirung der entsprechenden Kurven bei den Abbildungen höherer Grade ergiebt sich aus der Betrachtung des Grenzfalles, wo die Parallelen zu den Achsen durch stete Annäherung in die Achsen selbst übergehen. Für das Ent-

sprechen der Achsen der z- und ZEbene ergiebt sich aber, analog der Periode der Werthe der Potenzen von i, eine Periode mit dem Index $4n$. Beim $4n+1^{\text{ten}}$ Grade findet ein vollständiges Entsprechen der Achsen statt; beim $4n+2^{\text{ten}}$ Grade entspricht den Achsen der zEbene die ganze reelle Achse der ZEbene; beim $4n+3^{\text{ten}}$ Grade entspricht der xAchse die XAchse vollständig, der yAchse die YAchse mit entgegengesetztem Verlaufe; beim $4n+4^{\text{ten}}$ Grade entspricht den Achsen der zEbene nur die positive reelle Achse der ZEbene.

Ein jedes System von Parallelen in der zEbene giebt als Abbildung in der ZEbene eine Schaar Kurven derselben Art, deren Symmetrieachsen gegen die XAchsen um das Dreifache des Winkels gedreht sind, welchen das auf die Parallelen in der zEbene vom Anfangspunkte gefällte Loth mit der positiven xAchse bildet. Dem Strahlenbüschel durch einen Punkt $(a+bi)$ der zEbene entspricht ein Büschel derselben Kurven in der ZEbene. Die Gleichung dieser Geraden ist

$$\frac{y-b}{x-a} = tg\,\gamma$$

wenn man mit γ den Winkel der betreffenden Geraden mit der positiven xAchse bezeichnet. In Polarkoordinaten wird die Gleichung

$$\frac{r\sin\varphi - b}{r\cos\varphi - a} = tg\,\gamma$$

Die Gleichung der Abbildungskurven wird also

$$\frac{\sqrt[3]{R}\,\sin\frac{\Phi}{3} - b}{\sqrt[3]{R}\,\cos\frac{\Phi}{3} - a} = tg\,\gamma$$

Abbildungen von Geraden der Z Ebene auf die z Ebene.

Für die durch den Anfangspunkt gehenden Geraden ergeben sich ganz entsprechende Beziehungen, wie in dem vorher behandelten Falle.

Einer Parallelen zur Y Achse, deren Gleichung ist

$$X = a$$

entspricht eine Kurve dritten Grades, welche die Gleichung hat

$$x^3 - 3xy^2 = a$$

Dieselbe liegt symmetrisch zur x Achse und schneidet dieselbe in einem Punkte, für den $x = \sqrt[3]{a}$ ist. Für $x > \sqrt[3]{a}$ wächst y gleichzeitig mit x. Dabei nähert sich in Folge von

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{a}{x^3}}{3}}$$

das Verhältniss $\frac{y}{x}$ für wachsende x immer mehr dem Werthe $\pm \sqrt{\frac{1}{3}} = tg \pm 30^0$, so dass also zwei unter Winkeln von $\pm 30^0$ gegen die x Achse geneigte Geraden Asymptoten an diesen

Kurvenzweig sind. Für positive Werthe von x, die kleiner sind als $\sqrt[3]{a}$, werden die y imaginär. Für negative, aber der Null sich nähernde Werthe von x wächst y ins Unendliche, so dass also die y Achse eine Asymptote der beiden auf der negativen Seite derselben liegenden Zweige der Kurve wird. Für nach der negativen Seite hin wachsende x nimmt y wieder zu; das Verhältniss $\frac{y}{x}$ nähert sich hier in Folge von

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{a}{x^3}}{3}}$$

dem Werthe $\pm \sqrt{\frac{1}{3}} = tg \pm 30^0$, so dass also die Asymptoten des auf der positiven Seite liegenden Kurvenzweigs ebenfalls Asymptoten an die beiden auf der negativen Seite liegenden Zweige sind.

Die Kurve besteht also, wie schon aus der Dreideutigkeit von $z = \sqrt[3]{Z}$ hervorging, aus drei getrennten Zweigen, deren Symmetrieachsen unter Winkeln von 120^0 auf einander folgen. Die Scheitelpunkte der drei Zweige liegen auf einem mit dem Radius $\sqrt[3]{a}$ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreise.

Einer Parallelen zur Y Achse im Abstande

$$X = -a$$

entspricht die Kurvengleichung

$$x^3 - 3xy^2 = -a$$

Dieselbe gehört einer Kurve an, welche der vorigen kongruent, aber um einen Winkel von 180^0 gegen dieselbe gedreht ist. In Folge davon sind die Asymptoten dieselben; dagegen ist hier die negative reelle Achse Symmetrieachse des einen

Zweiges, während die beiden anderen Zweige auf der positiven Seite der asymptotischen imaginären Achse liegen.

Einer Parallelen zur X Achse, deren Gleichung ist

$$Y = b$$

entspricht als Abbildung in der z Ebene eine Kurve, deren Gleichung ist

$$3x^2y - y^3 = b$$

oder

$$y^3 - 3x^2y = -b.$$

Dieselbe stimmt also mit der vorigen vollständig überein, nur sind die x- und y Achse mit einander vertauscht.

Einer Parallelen im Abstande

$$Y = -b$$

entspricht die Gleichung

$$3x^2y - y^3 = -b$$

oder

$$y^3 - 3x^2y = b$$

Hier ist also der positive Theil der imaginären Achse Symmetrieachse des einen Zweigs, während die reelle Achse Asymptote an die beiden anderen unterhalb derselben liegenden Zweige der Kurve ist.

Die Polargleichung dieser Kurven ergiebt sich, wenn in die Gleichungen

$$X = R\cos\Phi = \pm a$$
$$Y = R\sin\Phi = \pm b$$

die entsprechenden Werthe von r und φ eingesetzt werden, als

$$r^3\cos 3\varphi = \pm a$$
$$r^3\sin 3\varphi = \pm b$$

Figur II. stellt dieselben für den Fall $a = b$ dar.

Wird in der Z Ebene statt einer Parallelen zu einer Achse eine beliebige Grade genommen, so ergiebt sich Folgendes:

Die Gleichung einer solchen, für welche der senkrechte Abstand vom Anfangspunkte mit a und der Winkel mit der positiven reellen Achse mit α bezeichnet wird, ist in Polarkoordinaten

$$R\cos(\Phi-\alpha)=a$$

Die Gleichung der zugehörigen Abbildungskurve in der z Ebene ist also

$$r^3\cos(3\varphi-\alpha)=a$$

oder

$$r^3\cos 3\left(\varphi-\frac{\alpha}{3}\right)=a$$

Aus der Vergleichung mit der entsprechenden Kurvengleichung für eine Parallele zu einer Achse ergiebt sich, dass die hier erhaltene Kurve der früheren kongruent, aber um einen Winkel $\frac{\alpha}{3}$ gegen dieselbe gedreht ist.

Das System von Parallelen zu einer solchen Geraden, welches also durch Variation von a erhalten wird, ergiebt als Abbildung ein System ähnlicher Kurven, welche gemeinschaftliche Asymptoten haben und deren Scheitelpunkte in der Entfernung $\sqrt[3]{a}$ vom Anfangspunkte liegen. Eine Aenderung von α, also eine Drehung des Systems in der Z Ebene hat eine Drehung der Kurven in der z Ebene um ein Drittel des Drehungswinkels zur Folge.

Es erübrigt die Betrachtung des Strahlenbüschels durch einen Punkt $(a+bi)$ der Z Ebene. Die Gleichung einer Geraden durch diesen Punkt ist

$$\frac{Y-b}{X-a}=tg\,\gamma$$

wobei wieder γ den Winkel der Geraden mit der positiven reellen Achse bezeichnet. Die entsprechende Kurve in der z Ebene hat also die Gleichung

$$\frac{3x^2y - y^3 - b}{x^3 - 3xy^2 - a} = tg\,\gamma$$

oder $(x^3 tg\,\gamma + y^3) - 3xy\,(x + y\,tg\,\gamma) + (b - a\,tg\,\gamma) = 0$

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung der Geraden

$$\frac{R\,sin\,\Phi - b}{R\,cos\,\Phi - a} = tg\,\gamma$$

also die der Abbildungskurve

$$\frac{r^3\,sin\,3\varphi - b}{r^3\,cos\,3\varphi - a} = tg\,\gamma.$$

Weitere Eigenschaften dieser Kurven, als deren Grundform sich bei der Abbildung $Z = z^2$ die gleichseitige Hyperbel ergiebt, erhält man durch folgende Betrachtung, bei welcher der von Holzmüller in seiner »Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik. Leipzig, bei Teubner. 1882« angegebene Gang der Entwicklung innegehalten werden möge.

Es ist

$$x + yi = r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi) = re^{\varphi i}$$

also

$$log\,(x + yi) = log\,r + \varphi i$$

$$= log\,\sqrt{x^2 + y^2} + i\,arc\,tg\,\frac{y}{x}$$

Ebenso ist

$$log\,(x - yi) = log\,\sqrt{x^2 + y^2} - i\,arc\,tg\,\frac{y}{x}$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen ergiebt sich

$$2i\,arc\,tg\,\frac{y}{x} = log\,\frac{x + yi}{x - yi}$$

Wendet man dies auf die obige Gleichung

$$\gamma = arc\,tg\,\frac{Y - b}{X - a}$$

an, so wird

$$\gamma = \frac{1}{2i} \log \frac{(X-a)+i(Y-b)}{(X-a)-i(Y-b)}$$

oder

$$\gamma = \frac{1}{2i} \log \frac{(X+Yi)-(a+bi)}{(X-Yi)-(a-bi)}$$

In Folge von

$$X+Yi = (x+yi)^3$$

woraus sich weiter ergiebt

$$X-Yi = (x-yi)^3$$

wird die Gleichung der Abbildungskurve in der z Ebene

$$\gamma = \frac{1}{2i} \log \frac{(x+yi)^3-(a+bi)}{(x-yi)^3-(a-bi)}$$

Durch Auflösung der Gleichung

$$(x+yi)^3-(a+bi)=0$$

erhält man für $(x+yi)$ die drei Werthe von $\sqrt[3]{a+bi}$, nämlich

$$\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)$$

Auf diese Weise lassen sich also Zähler und Nenner des obigen Logarithmus in ein Produkt von je drei Differenzen, und weiter dann in das Produkt von drei Quotienten zerlegen, die durch Ausführung der Logarithmirung die Summen von drei Logarithmen je eines Quotienten ergeben, von welchen also der erste die Form hat

$$\log \frac{(x+yi)-\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)}{(x-yi)-\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right)}$$

Wendet man hierauf wieder die obige Transformation an, wonach

$$\frac{1}{2i} log \frac{m}{n} = arc\,tg \frac{\frac{1}{2i}(m-n)}{\frac{1}{2i}(m+n)}$$

so erhält man als Gleichung für γ die Summe von drei *arc tg*, wovon der erste die Form hat

$$arc\,tg \frac{\frac{1}{i}\left[x+yi-\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(cos\frac{\varphi}{3}+isin\frac{\varphi}{3}\right)\right]-\left[x-y-\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(cos\frac{\varphi}{3}-isin\frac{\varphi}{3}\right)\right]}{x+yi-\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(cos\frac{\varphi}{3}+isin\frac{\varphi}{3}\right)+x-yi-\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(cos\frac{\varphi}{3}-isin\frac{\varphi}{3}\right)}$$

oder

$$arc\,tg \frac{y-\sqrt[6]{a^2+b^2}\,sin\frac{\varphi}{3}}{x-\sqrt[6]{a^2+b^2}\,cos\frac{\varphi}{3}}$$

Setzt man noch für φ den Werth $arc\,tg\frac{b}{a}$ ein, so wird also die oben erhaltene Gleichung der Abbildungskurve

$$\gamma = arc\,tg \frac{y-\sqrt[6]{a^2+b^2}.\,sin\frac{arc\,tg\frac{a}{b}}{3}}{x-\sqrt[6]{a^2+b^2}.\,cos\frac{arc\,tg\frac{a}{b}}{3}} +$$

$$+ arc\,tg \frac{y-\sqrt[6]{a^2+b^2}.\,sin\frac{arc\,tg\frac{b}{a}+2\pi}{3}}{x-\sqrt[6]{a^2+b^2}.\,cos\frac{arc\,tg\frac{b}{a}+2\pi}{3}} +$$

$$+\,arc\,tg\,\frac{y-\sqrt[6]{a^2+b^2}\,.\,sin\,\frac{arc\,tg\,\frac{b}{a}+4\pi}{3}}{x-\sqrt[6]{a^2+b^2}\,.\,cos\,\frac{arc\,tg\,\frac{b}{a}+4\pi}{3}}$$

Dem Punkte $(a+bi)$ der Z Ebene entsprechen in der z Ebene drei Punkte, die durch die drei Werthe von $\sqrt[3]{a+bi}$ dargestellt werden. Die Gleichungen der drei Verbindungslinien dieser Punkte mit einem Punkte $(x+yi)$ der Abbildungskurve in der z Ebene, wenn mit φ_1, φ_2 und φ_3 der Reihe nach die drei Winkel dieser Verbindungslinien mit der reellen Achse bezeichnet werden, sind also

$$tg\,\varphi_1 = \frac{y-\sqrt[6]{a^2+b^2}\,.\,sin\,\frac{arc\,tg\,\frac{b}{a}}{3}}{x-\sqrt[6]{a^2+b^2}\,.\,cos\,\frac{arc\,tg\,\frac{b}{a}}{3}}$$

$$tg\,\varphi_2 = \frac{y\;\sqrt[6]{a^2+b^2}\,.\,sin\,\frac{arc\,tg\,\frac{b}{a}+2\pi}{3}}{x-\sqrt[6]{a^2+b^2}\,.\,cos\,\frac{arc\,tg\,\frac{b}{a}+2\pi}{3}}$$

$$tg\,\varphi_3 = \frac{y-\sqrt[6]{a^2+b^2}\,.\,sin\,\frac{arc\,tg\,\frac{b}{a}+4\pi}{3}}{x-\sqrt[6]{a^2+b^2}\,.\,cos\,\frac{arc\,tg\,\frac{b}{a}+4\pi}{3}}$$

Durch Vergleichung mit der oben erhaltenen Kurvengleichung ergibt sich die Beziehung

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\gamma.$$

Diese Beziehung gilt in Folge von der allgemeinen Gültigkeit ihrer Entwicklung für jede Abbildung von der Form $z = \sqrt[n]{Z}$ bei reellem, positivem, rationalem n. Für $n = 2$ geht dieselbe in die Beziehung $\varphi_1 + \varphi_2 = \gamma$ über. Dies ist eine Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel, welche bekanntlich der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke ist, welche über einer gegebenen Grundlinie stehen und für die die Differenz der Winkel an der Grundlinie konstant ist.

Wegen dieser Analogieen bezeichnet Holzmüller die vorliegenden Kurven als reguläre Hyperbeln höherer (im vorliegenden Falle also dritter) Ordnung. Eine weitere Aehnlichkeit dieser Kurven mit der gleichseitigen Hyperbel und die den Brennpunkten der letzteren entsprechenden Punkte erhält man folgendermaassen:

Die Brennpunkte der gleichseitigen Hyperbel haben die Eigenschaft, dass das Produkt ihrer Verbindungslinien mit einem beliebigen Kurvenpuncte gleich ist dem Quadrate der Verbindungslinie desselben Kurvenpunktes mit dem Mittelpunkte. Für die regulären Hyperbeln dritter (und entsprechend auch höherer) Ordnung gibt es drei entsprechende Punkte, so dass das Produkt aus den drei Verbindungslinien derselben mit irgend einem Kurvenpunkte gleich der dritten Potenz der Verbindungslinie desselben Kurvenpunktes mit dem Mittelpunkte der Kurve ist. Diese Punkte werden gefunden, wenn man die abzubildende Gerade der ZEbene als den geometrischen Ort aller Punkte betrachtet, welche von zwei festen Punkten gleiche Entfernung haben. Nimmt man nun als den einen dieser festen Punkte den Anfangspunkt, als den zweiten also den Gegen- oder Spiegelpunkt des Anfangspunktes in Bezug auf die abzubildende Gerade, so entspricht dem Anfangspunkt der ZEbene auch der Anfangspunkt der zEbene, dem Gegenpunkte in der ZEbene aber drei Punkte der zEbene, welchen die oben

angegebene Eigenschaft in Bezug auf die der Geraden der ZEbene entsprechende Hyperbel dritter Ordnung zukommt und die also den Brennpunkten der gleichseitigen Hyperbel entsprechen. Diese drei Punkte liegen auch auf den, den Anfangspunkt und die Scheitel der drei Kurvenzweige verbindenden Geraden, also den Symmetrieachsen. Für den Fall der Abbildung einer Parallelen zur YAchse im Abstande a vom Anfangspunkte liegen sie also auf der reellen Achse und zwei gegen dieselbe unter Winkeln von 120° und 240° geneigten Geraden in der Entfernung $\sqrt[3]{2a}$ vom Anfangspunkte.

Abbildungen von Kreisen der Z Ebene auf die z Ebene.

Die Gleichung eines in der ZEbene mit dem Radius c um den Mittelpunkt $(a+bi)$ beschriebenen Kreises ist

$$(X-a)^2+(Y-b)^2=c^2$$

Unbeschadet der allgemeinen Gültigkeit der Resultate kann der Mittelpunkt desselben auf der XAchse angenommen, also

$$b=0$$

gesetzt werden, wodurch obige Gleichung übergeht in

$$(X-a)^2+Y^2=c^2$$

Die Gleichung der entsprechenden Abbildungskurve in der zEbene wird also

$$(x^3-3xy^2-a)^2+(3x^2y-y^3)^2=c^2$$

Durch Ausführung der Potenzirung und passende Anordnung lässt sich diese Gleichung auf die Form bringen

$$(x^2+y^2)^3-2a(x^3-3xy^2)+a^2-c^2=0$$

in welcher die Analogie mit der Gleichung der Cassini'schen

Linie hervortritt, welche letztere die entsprechende Kurve bei der Abbildung $Z = z^2$ oder $z = \sqrt{Z}$ ist.

In Polarkoordinaten ist die entsprechende Kreisgleichung

$$(R\cos\Phi - a)^2 + R^2\sin^2\Phi = c^2,$$

die der Abbildungskurve also

$$(r^3\cos 3\varphi - a)^2 + r^6\sin^2 3\varphi = c^2$$

oder

$$r^6 - 2ar^3\cos 3\varphi + a^2 - c^2 = 0.$$

Analog, wie bei der Cassini'schen Linie, ergiebt sich eine Verschiedenheit der Gestalt, je nachdem

1) $c < a$
2) $c = a$
3) $c > a$.

Im Falle 1) liegt also der Anfangspunkt ausserhalb, im Falle 3) innerhalb des Kreises, im Falle 2) auf der Peripherie desselben.

In allen drei Fällen haben die Kurven wieder drei Symmetrieachsen, von denen die eine die reelle Achse ist, die beiden andern um 120° resp. 240° gegen dieselbe geneigt sind. Für einen beliebigen Kreis der ZEbene, für welchen die Verbindungslinie des Anfangspunktes mit dem Mittelpunkte mit der positiven reellen Achse einen Winkel α bildet, ist die eine Symmetrieachse der Abbildungskurve in der zEbene um den Winkel $\frac{\alpha}{3}$ gegen die positive reelle Achse geneigt, die beiden anderen also um Winkel von $\frac{\alpha}{3} + 120°$ resp. $\frac{\alpha}{3} + 240°$.

1) Fall: $c < a$.

Die Durchschnittspunkte mit der reellen Achse ergeben sich nach Einsetzen von

$$y = 0$$

aus der Gleichung

$$(x^3 - a)^2 = c^2.$$

Ebenso wird aus der Gleichung in Polarkoordinaten für

$$\varphi = 0$$
$$(r^3 - a)^2 = c^2$$

Für r^3 ergeben sich hieraus zwei positive Werthe

$$r^3 = a \pm c$$

also

$$r = \sqrt[3]{a + c}$$

und

$$r = \sqrt[3]{a - c}$$

Diese beiden Werthe sind der grösste und kleinste Werth von r. Der grösste Werth von φ, der die Richtung der vom Anfangspunkt an die Kurve gezogenen Tangenten angiebt, findet Statt für

$$r = \sqrt[6]{a^2 - c^2}$$

Es ist dann

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}.$$

Beides ergiebt sich sowohl aus der Gleichung der Kurve, als auch unmittelbar aus der Figur.

Die Kurve besteht also aus drei getrennten, geschlossenen Zweigen. Ihre Durchschnittspunkte mit den Symmetrieachsen liegen auf zwei mit den Radien $\sqrt[3]{a + c}$ und $\sqrt[3]{a - c}$ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreisen. Der Winkel 2φ, den die beiden vom Anfangspunkt an einen Kurvenzweig gezogenen Tangenten einschliessen, ergiebt sich aus der oben angegebenen Beziehung

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}.$$

So ist z. B. für $a = 2c$

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also $$2\varphi = 20^0.$$

2) Fall: $c = a$.

Die Gleichung der Kurve erhält also die Form

$$(x^2 + y^2)^3 - 2a(x^3 - 3xy^2) = 0$$

oder

$$r^6 - 2ar^3 \cos 3\varphi = 0$$

Letztere lässt sich schreiben

$$r^3(r^3 - 2a \cos 3\varphi) =$$

Es genügt ihr einmal

$$r^3 = 0$$

Die Kurve geht also durch den Anfangspunkt und zwar ist derselbe ein dreifacher Punkt. Die drei anderen Werthe von r ergeben sich aus

$$r = \sqrt[3]{2a \cos 3\varphi}$$

Für $\varphi = 0$

ist $r = \sqrt[3]{2a}$ ein maximum

Für $\varphi = 30^0$

ist $r = 0.$

Wie sich aus

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = 0$$

ergiebt, ist der Winkel φ, unter welchem die Tangenten im Anfangspunkt gegen die Symmetrieachsen geneigt sind, 30^0.

Die Kurve entspricht also in diesem Falle sowohl ihrer Gleichung, als ihrer Gestalt nach der Schleifenlemniskate.

3) Fall: $c > a$.

Aus der Gleichung

$$r^6 - 2ar^3 \cos 3\varphi + a^2 - c^2 = 0$$

wird wieder für

$$\varphi = 0$$

$$(r^3 - a)^2 = c^2$$

woraus

$$r = \sqrt[3]{a \pm c}$$

Da jedoch negative Werthe von r unzulässig sind, so folgt hieraus nur Ein Schnittpunkt mit der reellen positiven Achse, für welchen

$$r = \sqrt[3]{a + c}$$

Der Schnittpunkt mit der positiven imaginären Achse, für die

$$\varphi = 90^0$$

liegt in der Entfernung vom Anfangspunkte

$$r = \sqrt[6]{c^2 - a^2}$$

Für $\varphi = 180^0$ wird $r = \sqrt[3]{c - a}$.

Für $\varphi = 270^0$ ist $r = \sqrt[6]{c^2 - a^2}$.

Die Kurve besteht aus einem geschlossenen, den Anfangspunkt umgebenden Linienzuge. Aus der Periodicität von $\cos 3\varphi$ ergeben sich folgende Beziehungen, die sich den allgemeinen über diese Curven erhaltenen Resultaten anschliessen: Die Kurve hat wieder dieselben drei Symmetrieachsen und besteht aus drei kongruenten Stücken, welche durch zwei gegen die reelle positive Achse unter den Winkeln von $+ 60^0$ und $- 60^0$ geneigten Geraden und durch die reelle negative Achse eingeschlossen werden. Diese drei Linien werden in der Entfernung $\sqrt[3]{c - a}$ vom Anfangspunkt durchschnitten; die Symmetrie-

achsen in der Entfernung $\sqrt[3]{c+a}$; die Halbirungslinien der von diesen sechs Linien eingeschlossenen Winkel von 60^0 in der Entfernung $\sqrt{c^2-a^2}$.

Figur III. stellt die drei Fälle in der ZEbene und die entsprechenden Abbildungskurven in der zEbene dar, wobei im 1. Falle

$$c = \frac{1}{2}a,$$

im 2. Falle

$$c = 2a$$

genommen ist.

Die Analogie dieser Kurven mit der Cassini'schen Linie lässt sich noch weiter verfolgen durch eine Entwicklung, welche der bei den Hyperbeln höherer Ordnung gemachten ähnlich und ebenfalls von Holzmüller l. c. zuerst angegeben worden ist.

Die Gleichung des Kreises

$$(X-a)^2+(Y-b)^2=c^2$$

lässt sich nach Ausführung der Potenzirung auch schreiben

$$(X^2+Y^2)+(a^2+b^2)-(2aX+2bY)=c^2$$

oder auch

$$(X+Yi)(X-Yi)+(a+bi)(a-bi)-$$
$$-\left[(a+bi)(X-Yi)+(a-bi)(X+Yi)\right]=c^2$$

Letztere ist identisch mit

$$\left[(X+Yi)-(a+bi)\right]\left[(X-Yi)-(a-bi)\right]=c^2$$

Durch die Abbildung geht dieselbe über in

$$\left[(x+yi)^3-(a+bi)\right]\left[(x-yi)^3-(a-bi)\right]=c^2$$

Hier lässt sich, wie in der früheren Entwicklung, jeder der beiden in den eckigen Klammern stehenden Faktoren in drei Faktoren

zerlegen, von welchen der erste des ersten Faktors die Form hat

$$\left[(x+yi) - \sqrt[6]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\right]$$

und der entsprechende erste des zweiten Factors

$$\left[(x-yi) - \sqrt[6]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\right]$$

Diese beiden lassen sich auf die Form bringen

$$\left[\left(x - \sqrt[6]{a^2+b^2}.\ \cos\frac{\varphi}{3}\right) + i\left(y - \sqrt[6]{a^2+b^2}.\ \sin\frac{\varphi}{3}\right)\right]$$

und

$$\left[\left(x - \sqrt[6]{a^2+b^2}.\ \cos\frac{\varphi}{3}\right) - i\left(y - \sqrt[6]{a^2+b^2}.\ \sin\frac{\varphi}{3}\right)\right]$$

sind also konjugirt imaginär und liefern durch Ausführung der Multiplikation einen Ausdruck von der Form

$$\left[\left(x - \sqrt[6]{a^2+b^2}.\ \cos\frac{\varphi}{3}\right)^2 + \left(y - \sqrt[6]{a^2+b^2}.\ \sin\frac{\varphi}{3}\right)^2\right].$$

wobei für φ wieder $arc\,tg\,\frac{b}{a}$ gesetzt werden kann. Dieser Ausdruck stellt das Quadrat der Entfernung eines Punktes $(x+yi)$ von dem ersten der drei, dem Punkte $(a+bi)$, also dem Mittelpunkte des Kreises in der ZEbene, entsprechenden Punkte in der zEbene dar.

Ebenso erhält man noch zwei weitere Ausdrücke von derselben Form, worin nur statt $\frac{\varphi}{3}$ zu setzen ist $\frac{\varphi+2\pi}{3}$ resp. $\frac{\varphi+4\pi}{3}$. Diese Ausdrücke stellen das Quadrat der Entfernung des Punktes $(x+yi)$ von den beiden anderen, dem Punkte $(a+bi)$ der ZEbene entsprechenden Punkten der zEbene dar.

Bezeichnet man diese drei Entfernungen der Reihe nach mit p_1, p_2 und p_3, so ist also die Gleichung der Abbildungskurve

$$p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 = c^2$$

oder

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = c$$

Diese Eigenschaft, welche sich auf dieselbe Weise auch für die Abbildungen von höherem Grade nachweisen lässt, entspricht der bekannten Eigenschaft der Cassini'schen Linie, wonach dieselbe der geometrische Ort aller Punkte ist, für welche das Produkt aus den Abständen von zwei festen Punkten einen konstanten Werth hat. Diese Punkte, die man als Brennpunkte bezeichnen kann, sind also im vorliegenden Falle die dem Mittelpunkte des Kreises in der ZEbene entsprechenden drei Punkte der ZEbene und liegen auf den Symmetrieachsen in der Entfernung $\sqrt[3]{a}$ vom Anfangspunkte.

Bei dem betrachteten Falle lagen die Mittelpunkte der Kreise der ZEbene auf der reellen Achse, die Brennpunkte also auf den drei, den Abbildungskurven gemeinsamen Symmetrieachsen. Dasselbe ist der Fall, wenn die Kreismittelpunkte auf einer beliebigen, aber durch den Anfangspunkt gehenden Geraden liegen. Liegen dieselben aber auf einer beliebigen Geraden, wie es z. B. für die Gesammtheit der durch zwei beliebige Punkte der ZEbene gehenden Kreise der Fall ist, so liegen gemäss den früheren Entwicklungen die Brennpunkte der Abbildungskurven auf einer regulären Hyperbel dritter Ordnung.

Abbildungen von Kreisen der z Ebene auf die Z Ebene.

Die hier sich ergebenden Resultate lassen sich in einfacher Form nur durch Polarkoordinaten darstellen. Dabei kann wieder der Mittelpunkt des Kreises der z Ebene auf der reellen Achse angenommen werden. Die Gleichung desselben ist dann

$$(x-a)^2+y^2=c^2$$

oder

$$(r\cos\varphi-a)^2+r^2\sin^2\varphi=c^2$$

Durch die Abildung geht sie über in

$$(\sqrt[3]{R}\cos\frac{\Phi}{3}-a)^2+\sqrt[3]{R^2}\sin^2\frac{\Phi}{3}=c^2$$

oder

$$\sqrt[3]{R^2}-2a\sqrt[3]{R}\cos\frac{\Phi}{3}+a^2-c^2=0.$$

Diese Gleichung hat eine ähnliche Form, wie die bei dem vorigen, umgekehrten Problem erhaltene. Auch hier ergeben sich Unterschiede in der Gestalt der Kurve, je nachdem

1) $c<a$
2) $c=a$
3) $c>a$.

Der einfachste Fall 2) soll hier zuerst behandelt werden. Die Gleichung wird dann

$$\sqrt[3]{R^2}-2a\sqrt[3]{R}\cos\frac{\Phi}{3}=0$$

oder

$$R=8a^3.\cos^3\frac{\Phi}{3}$$

Sie entspricht der Gleichung der Kardioide, welche sich bei der Abbildung zweiten Grades ergiebt in der Form

$$R = 4a^2 . \cos^2 \frac{\Phi}{2}$$

Hierbei liegt bekanntlich der Anfangspunkt des Coordinatensystems auf der Peripherie des festen Kreises.

Die Kurve durchschneidet die positive reelle Achse in der Entfernung $8a^3$ vom Anfangspunkte, die positive imaginäre Achse in der Entfernung $3\sqrt{3}\,a^3$, die negative reelle Achse in der Entfernung a^3 und geht dann durch den dritten Quadranten bei $\Phi = 270^0$
und also $R = 0$
in den Anfangspunkt.

Von da ab werden die R negativ bis zu

$$\Phi = 3.\ 270^0,$$

von wo an der andere Zweig der Kurve dem ersten congruent verläuft. Nach der Riemannschen Darstellungsweise ist derselbe als im dritten, also untersten Blatte liegend anzunehmen.

Zu der früher bei der Abbildung einer zur imaginären Achse parallelen Geraden der z Ebene in der Z Ebene erhaltenen Kurve, deren Gleichung sich ergab als

$$R = \frac{a^3}{\cos^3 \frac{\Phi}{3}},$$

steht die hier erhaltene Kurve in einer reciproken Beziehung, wie die Vergleichung der Gleichungen und des Verlaufs beider Kurven zeigt. Dem Verlauf zum Anfangspunkte entspricht dort ein Verlaufen zum unendlich fernen Punkte.

Bei den Abbildungen von höheren Graden ergeben sich ähnliche Beziehungen. In Folge von $\cos \frac{\Phi}{n}$ durchläuft die Kurve n Quadranten, ehe sie zum Anfangspunkte geht.

Bei dem Falle 1) $c < a$
wird aus der Gleichung

$$(\sqrt[3]{R})^2 - 2a\sqrt[3]{R}\cos\frac{\Phi}{3} + a^2 - c^2 = 0$$

für

$$\Phi = 0$$

$$(\sqrt[3]{R} - a)^2 = c^2,$$

woraus sich ergibt

$$\sqrt[3]{R} = a \pm c.$$

Hier sind wieder beide Werthe zulässig und stellen den grössten resp. kleinsten Werth von R dar.

Die Kurve besteht aus einem geschlossenen Linienzuge, der die reelle Achse zur Symmetrieachse hat.

Die Entwicklungen sind überhaupt den bei dem umgekehrten Abbildungsproblem gemachten ganz entsprechend; an Stelle der Dreideutigkeit tritt hier ein dreifaches Umkreisen des Anfangspunktes, wie früher allgemein angegeben wurde. Dies tritt vollständig hervor beim
Falle 3) $c > a$,
wo also der Kreis in der z Ebene den Anfangspunkt umschliesst. Die Abbildungskurve in der Z Ebene schneidet dann die positive reelle Achse nur in einem Punkte, für den

$$\sqrt[3]{R} = a + c.$$

Dabei kann hier $\sqrt[3]{R}$ und also auch R für keinen Werth von Φ imaginär oder negativ werden. Nach dreimaliger Umkreisung des Anfangspunktes, der also durch die drei Blätter verlaufend zu denken ist, kehrt die Kurve für

$$\frac{\Phi}{3} = 360^0$$

in denselben Punkt der positiven reellen Achse zurück, von dem sie ausgegangen ist.

Speziell ist

für $\Phi = \frac{3}{2}\pi$ $\qquad \sqrt[3]{R} = \sqrt{c^2 - a^2}$

$\Phi = 3\pi$ $\qquad \sqrt[3]{R} = c - a$

$\Phi = \frac{9}{2}\pi$ $\qquad \sqrt[3]{R} = \sqrt{c^2 - a^2}$

$\Phi = 6\pi$ $\qquad \sqrt[3]{R} = a + c.$

Auch hier ergeben sich für die Abbildungen von höherem Grade ganz analoge Resultate, wie im vorhergehenden Falle.

Lebenslauf.

Geboren wurde ich, Friedrich Wilhelm Schaffrath, am 15. Oktober 1852 zu Bedburg, Kreis Bergheim, Regierungsbezirk Köln, als Sohn des Arztes Dr. Max Schaffrath und der Cäcilie geb. Schmitz, welche beide mir schon durch den Tod entrissen sind. Ich besuchte die höhere Schule meines Heimathsortes und dann vier Jahre lang das Gymnasium zu Neuss, welches ich Herbst 1867 mit dem Zeugniss der Reife verliess. Meine mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien machte ich zu Münster und Marburg. Ich hörte die Vorlesungen der Herren Professoren und Docenten, in Münster: Altum, Heiss, Hittorf, Hosius, Karsch; in Marburg: von Drach, Dunker, Feussner, Hess, Klocke, Melde.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern spreche ich hiermit meinen besten Dank aus.

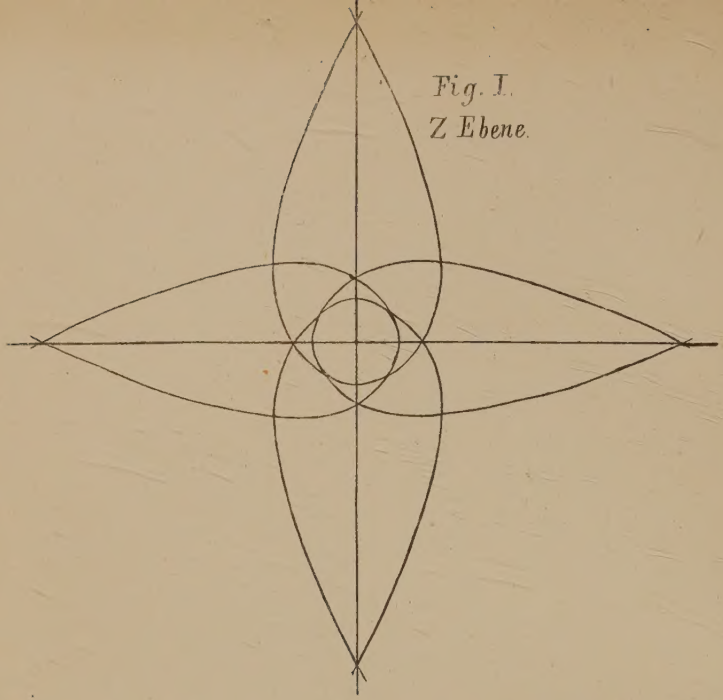

Fig. I.
Z Ebene.

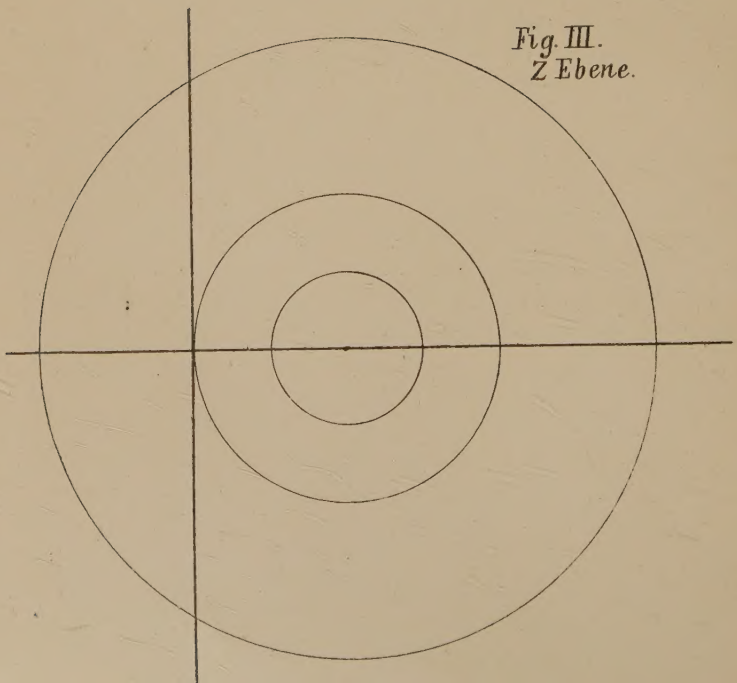

Fig. III.
Z Ebene.
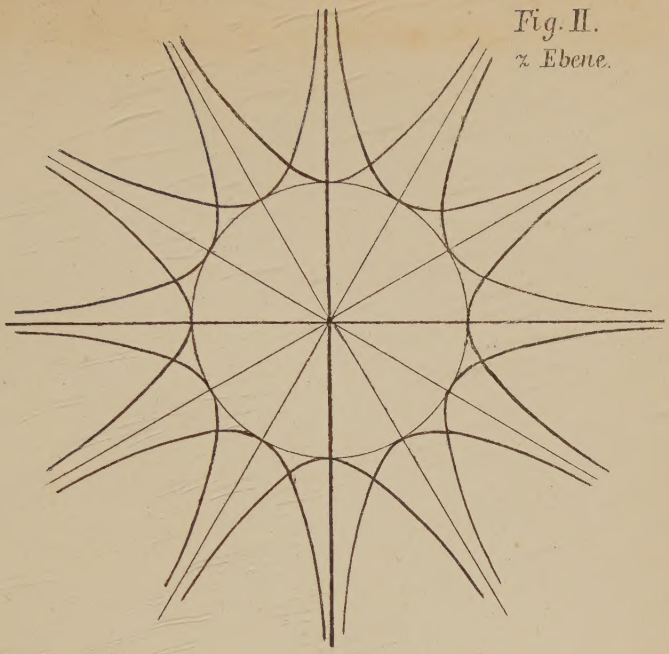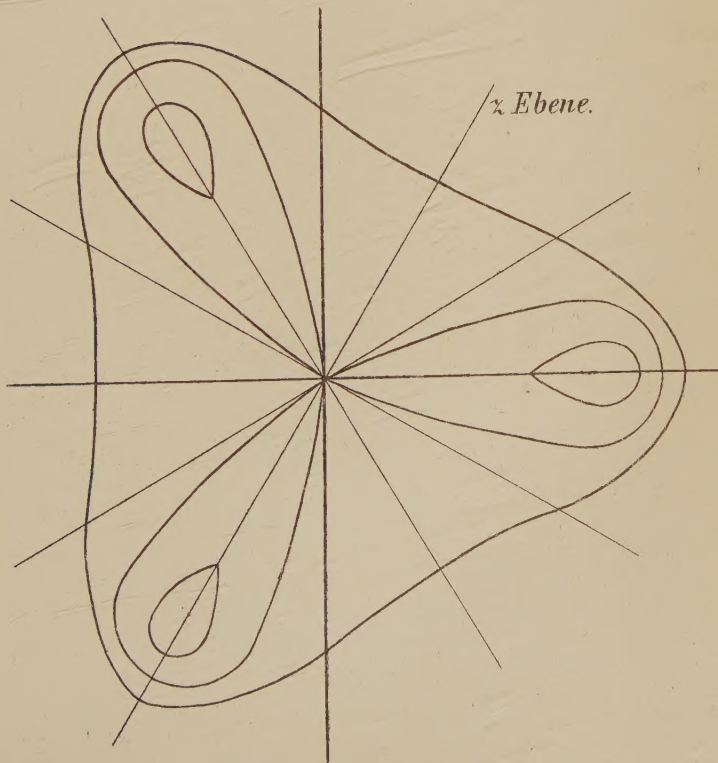
Fig. II.